E.B.M. Denissen

Eerlijkheid van verdelingen

Bacheloronderzoek, 24 juli 2014
Begeleider: Dr. F.M. Spieksma

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Iedereen heeft zichzelf wel eens in een situatie bevonden waarin één of meerdere goederen verdeeld moesten worden over een aantal mensen. Bij zo'n verdeling wil iedereen het liefst het grootste deel hebben. Laten we het voor het gemak over een cake hebben, dan is het doel dus om de cake zo te verdelen dat *iedereen* een stuk krijgt waar hij tevreden mee is.

In dit onderzoek wordt naar dergelijke problemen gekeken: *Wanneer is een gegeven verdeling eerlijk?*

Eerst zal beschreven worden wanneer een verdeling eerlijk genoemd mag worden. Hierna wordt naar het eenvoudige probleem gekeken van een verdeling over twee personen en daarna naar het complexe probleem van een verdeling over meer dan twee personen. Voor beide problemen zal een procedure uitgebreid besproken worden; een procedure die een verdeling oplevert waarmee iedereen tevreden is. Om een goed beeld te krijgen van de beschreven procedures, zullen voldoende (toelichtende) voorbeelden gegeven worden.
In werkelijkheid komt het vaak voor dat mensen liegen om op die manier een groter deel van (bijvoorbeeld) de cake te krijgen, ook hiernaar zal dus gekeken worden.

Het doel van dit onderzoek is om een beeld te krijgen van hoe verdelingen van één of meer goederen bereikt kunnen worden op een zo eerlijke mogelijke manier.

Tijdens dit onderzoek is gebruik gemaakt van de hoofdstukken 5 en 11 uit het boek 'Mathematics and Politics - Stratery, Voting, Power and Proof' van Alan D. Taylor en Allison M. Pacelli.[1] De stellingen, algoritmes en bewijzen uit deze hoofdstukken zijn wiskundig onvolledig, daarom zullen we in dit onderzoek proberen deze te verbeteren en correct te maken.

2 Wanneer is een verdeling eerlijk?

Voordat we kunnen gaan praten over eerlijke verdelingen moeten we definiëren wanneer een verdeling eerlijk is. Ook zullen enkele aannames en proposities gegeven worden die nodig zijn gedurende dit onderzoek.

2.1 De drie eerlijkheidscriteria

Een verdeling wordt 'eerlijk' gevonden als deze voldoet aan de zogenaamde *drie eerlijkheidscriteria*.[2] Deze drie criteria zullen we hieronder definiëren. Hiervoor geven we eerst een aantal andere definities die we nodig hebben voor verschillende bewijzen.

In dit onderzoek hebben we het vaak over *iemands waardering*. Met een waardering van een goed wordt de waarde bedoeld die een persoon aan (een deel van) een goed toekent. De totale waardering die een persoon toekent is 100% (zie hoofdstuk 3.2 voor voorbeelden). De som van waarderingen die de betrokken personen na de verdeling van de goederen hebben gekregen kan opgeteld groter zijn dan 100%, omdat de waarderingen individueel zijn. Hier zullen we later op terug komen.

In het grootste deel van dit onderzoek doen we de volgende aanname:
Aanname 2.1. Alle betrokkenen bij een verdeling zijn eerlijk.

Dit betekent dat we ervan uit mogen gaan dat niemand iets weet van de waarderingen van anderen. Iedereen geeft daarom precies zijn eigen waarderingen zonder deze gemanipuleerd te hebben in de hoop na de verdeling een groter deel te hebben gekregen dan waar hij volgens zijn originele eigen waardering recht op heeft.
In hoofdstuk 5 zullen we deze aanname laten vallen.

Definitie 2.2. Stel er zijn n mensen.
Een verdeling is *proportioneel* als iedereen tenminste $\frac{1}{n}^{\text{de}}$ deel van het totaal krijgt volgens zijn waardering.

Met behulp van een voorbeeld zullen we laten zien dat het mogelijk is dat elk van de n betrokkenen strikt meer dan $\frac{1}{n}^{\text{de}}$ van het totaal krijgt volgens zijn of haar verdeling en dat de som van de waarderingen dus meer dan 100% is:

Voorbeeld 2.3. We zullen voor het gemak een verdeling over 2 personen, zeg A en B, bekijken. De redenering gaat echter op voor een willekeurig aantal mensen, zeg $n > 0$.
Veronderstel dat we een cake hebben die voor de helft de smaak vanille heeft en voor de andere helft de smaak chocolade. Stel dat A niet van chocolade houdt en B niet van vanille. Stel dat A het vanilledeel krijgt en B het chocoladedeel, dan geldt in deze verdeling dat beide 100% van het hebben geheel gekregen volgens hun eigen waardering. De som van de waarderingen is dan dus 200%.

Definitie 2.4. Stel we moeten een goed over n mensen verdelen.
Een toegewezen stuk van dit goed wordt *acceptabel* gevonden door iemand als dat stuk tenminste $\frac{1}{n}$ deel van dit goed is volgens de waardering van die persoon.

Er volgt dus: Een verdeling is proportioneel $\Leftrightarrow$ Voor alle deelnemende personen is er een deel van een goed dat acceptabel is.

De drie definities die hieronder volgen zijn de drie eerlijksheidscriteria.

Definitie 2.5. Een verdeling is *jaloezie-vrij* als geen enkele persoon het deel van een ander meer waardeert dan zijn eigen deel.

Deze eis voor een verdeling is logischerwijs degene die men het liefst nastreeft.

Om te bewijzen dat een procedure om goederen te verdelen jaloezie-vrij is, wordt vaak de volgende propositie gebruikt:

Propositie 2.6.

(1) $\forall\ n > 0$: *Als een verdeling jaloezie-vrij is* $\Rightarrow$ *De verdeling is proportioneel.*

(2) Voor $n = 2$: *Een verdeling is jaloezie-vrij* $\Leftrightarrow$ *De verdeling is proportioneel.*

Bewijs.

(1) Het is voldoende om te laten zien dat een verdeling die niet proportioneel is, ook niet jaloezie-vrij is.
Veronderstel dat we een verdeling over $n > 0$ mensen hebben die niet proportioneel is. Dus minstens één iemand, zeg A, heeft minder dan $\frac{1}{n}^{\text{de}}$ deel gekregen volgens haar waardering. Er moet dan minstens nog één iemand, zeg B, zijn die meer dan $\frac{1}{n}^{\text{de}}$ deel heeft gekregen in de verdeling volgens A's waardering. Dus A is jaloers op B.

(2) Nu geldt $n = 2$. Uit (1) weten we dat als de verdeling jaloezie-vrij is, deze proportioneel is.
Stel de verdeling voor $n = 2$ is proportioneel, dan hebben beide personen volgens eigen waardering minstens de helft gekregen in de verdeling en de ander maximaal de helft. Iemand die zelf minstens de helft heeft gekregen, zal nooit jaloers zijn op de ander die maximaal de helft heeft gekregen. De verdeling is dus jaloezie-vrij.

□

Het bewijs dat propositie 2.6(2) niet voor $n > 2$ geldt, laten we achterwege omdat we dat niet nodig hebben tijdens dit onderzoek.

Definitie 2.7. Een verdeling is *onpartijdig* als elke betrokkene exact hetzelfde percentage van de totale waarde krijgt volgens zijn waardering.

Definitie 2.8. Een verdeling is *efficiënt* als er geen andere verdeling mogelijk is die tenminste net zo goed is voor iedereen en strikt beter voor tenminste één iemand volgens eigen waarderingen.

Als een verdeling jaloezie-vrij, onpartijdig en efficiënt is, dan zeggen we dat de verdeling 'eerlijk' is. Er bestaat dan namelijk geen andere verdeling die iedereen gelukkiger maakt.

Nu we weten wanneer een verdeling eerlijk genoemd mag worden, is ons doel om een manier te vinden waarmee in elke situatie een eerlijke verdeling gevonden kan worden. We zullen eerst naar het eenvoudige probleem met twee personen kijken, hoofdstuk 3. Daarna wordt aandacht besteed aan problemen met meer dan twee personen, hoofdstuk 4.

3 Verdeling over twee personen

In dit hoofdstuk gaan we kijken naar verdelingen over twee personen. We bekijken een procedure waarvan we zullen bewijzen dat die altijd een eerlijke verdeling oplevert en daarbij zullen enkele voorbeelden en toepassingen gegeven worden.

3.1 Adjusted winner procedure

De '*adjusted winner procedure*' is een procedure waarmee een aantal goederen, die niet noodzakelijk deelbaar hoeven te zijn, over twee personen verdeeld worden. We zullen eerst het algoritme bespreken. Daarna zullen we bewijzen dat deze procedure inderdaad voldoet aan de eerder genoemde drie eerlijkheidscriteria. Vervolgens zullen we een aantal voorbeelden geven om de werking van het algoritme te illustreren.

Algoritme 3.1. De 'adjusted winner procedure'

Veronderstel dat er twee personen A en B zijn.
We hebben goederen $G_1, ..., G_n$ die verdeeld moeten worden. Verder geldt:

A_i = het aantal punten dat A aan G_i geeft, $\sum A_i = 100$;
B_i = het aantal punten dat B aan G_i geeft, $\sum B_i = 100$;
a_i = de fractie van G_i die A krijgt in de verdeling,
b_i= de fractie van G_i die B krijgt in de verdeling,
$a_i + b_i = 1,\ i = 1, ..., n$,
T_a en T_b zijn de waarderingen die A resp. B hebben.

STAP 1.

Laat $T_a = T_b = 0$, $a_i = b_i = 0\ \forall i = 1, ..., n$

Doe $\forall i = 1, ..., n$:
Als $A_i > B_i :\ T_a := T_a + A_i,\ a_i = 1.$
Als $B_i > A_i :\ T_b := T_b + B_i,\ b_i = 1.$

Doe $\forall i = 1, ..., n$: Als $a_i = b_i = 0$, doe:
Als $T_a > T_b :\ T_b := T_b + B_i,\ b_i = 1.$
Als $T_b \geq T_a :\ T_a := T_a + A_i\ a_i = 1.$

STAP 2.

Als $T_a = T_b$, stop.
Anders: Ga naar stap 3.

STAP 3

Als $T_a > T_b$:
Laat $\frac{A_i}{B_i}$ de *ratio* zijn van goed G_i.
Kies i_0 :=argmin$\left\{\frac{A_i}{B_i} | i : a_i = 1\right\}$.

Herverdeel G_{i_0} zodanig dat $T_a = T_b$ gaat gelden, verplaats x van A naar B:
$x = \frac{T_a - T_b}{B_{i_0} + A_{i_0}}$ $(*)$

Als $x \geq 1$:
$T_a = T_a - A_{i_0}$
$T_b = T_b + B_{i_0}$.
Anders:
$T_b = T_b + B_{i_0} x$
$T_a = (T_a - A_{i_0}) + A_{i_0}(1 - x)$.
Ga naar stap 2.

Als $T_b > T_a$:
Laat $\frac{B_i}{A_i}$ de *ratio* zijn van goed G_i.
Kies i_0 :=argmin$\left\{\frac{B_i}{A_i}|i : b_i = 1\right\}$

Herverdeel G_{i_0} zodanig dat $T_b = T_a$ gaat gelden, verplaats x van B naar A:
$x = \frac{T_b - T_a}{A_{i_0} + B_{i_0}}$ $(*)$

Als $x \geq 1$:
$T_b = T_b - B_{i_0}$
$T_a = T_a + A_{i_0}$.
Anders:
$T_a = T_b + A_{i_0}x$
$T_b = (T_b - B_{i_0}) + B_{i_0}(1 - x)$.
Ga naar stap 2.

Claim 3.2. *Algoritme 3.1 is eindig.*

Bewijs.
We hebben een eindig aantal goederen om te verdelen.
Als in stap 2 de waarderingen van beide partijen gelijk zijn, dan stoppen we. De procedure eindigt.

In stap 3 verplaatsen we goederen totdat de waarderingen gelijk zijn. Als na het verplaatsen van een goed de waarderingen van A en B niet gelijk zijn, wordt stap 3 herhaald. Als na het verplaatsen van een goed de waarderingen gelijk zijn, dan eindigt de procedure. Als het splitsen van een goed tot gelijke waarderingen leidt (wat altijd gebeurd), dan stoppen we ook. De procedure eindigt dan.

Er volgt dat de procedure altijd eindig is. □

$(*)$ **N.B.:**
Stel $T_a > T_b$.
We willen $T_a = T_b$ krijgen.
Er geldt (voor herverdelen van i_0): $T_a = (T_a - A_{i_0}) + A_{i_0}(1 - x)$ en $T_b = T_b + B_{i_0}x$, waarbij x het deel van i_0 is dat van A naar B gaat en A_{i_0} en B_{i_0} zijn de waarderingen van A en B voor i_0 respectievelijk.

Er volgt:

$$\begin{aligned}
(T_a - A_{i_0}) + A_{i_0}(1 - x) &= T_b + B_{i_0}x \\
T_a - A_{i_0} + A_{i_0} - A_{i_0}x &= T_b + B_{i_0}x \\
T_a - A_{i_0}x &= T_b + B_{i_0}x \\
-A_{i_0}x - B_{i_0}x &= T_b - T_a \\
x(A_{i_0} + B_{i_0}) &= T_a - T_b \\
\Rightarrow x &= \frac{T_a - T_b}{A_{i_0} + B_{i_0}}.
\end{aligned}$$

Voor $T_b > T_a$ volgt x analoog.

Degene die in stap 2 de meeste punten heeft, wordt de *aanvankelijke winnaar* genoemd.

Opmerking 3.3. De 'adjusted winner procedure' verdeelt hooguit één goed over A en B (maximaal één goed wordt opgesplitst in delen).

Stelling 3.4. *De 'adjusted winner procedure' levert altijd een verdeling op die voldoet aan de drie eerlijkheidscriteria.*

Bewijs onpartijdigheid:
Dit volgt uit de procedure, we stoppen als beide partijen hetzelfde totale aantal punten is toegekend. Dat we altijd gelijke waarderingen krijgen, volgt uit Claim 3.2. □

Bewijs efficiëntie:
Van de drie criteria is het bewijs dat de procedure efficiënt is, het meest complex. Met behulp van het volgende lemma gaan we bewijzen dat deze procedure inderdaad efficiënt is.

We hebben de twee partijen A en B. Zij G_i, a_i, b_i, A_i, B_i met $i = 1, ..., n$ als in het bovenstaande algoritme.

Lemma 3.5. *Stel een verdeling is niet efficiënt. Dan zijn er goederen G_i, G_j waarvoor geldt: als A een deel θ_i van haar fractie $a_i > 0$ van goed G_i ruilt met een deel θ_j B's fractie $b_j > 0$ van goed G_j, dan is de verdeling minstens zo goed voor A én B en strikt beter voor A of B.*

Bewijs: Wat we willen laten zien is dat door A een deel van een fractie van één goed te laten ruilen met een deel van een fractie van één goed van B, uit een niet-efficiënte verdeling een verdeling verkregen kan worden die strikt beter is voor een van beiden en minstens zo goed voor allebei.

Stel dat in de verkregen verdeling A een totale waardering van T_a heeft, B een van T_b en deze verdeling niet-efficiënt is. Volgens de aanname bestaat er nu een andere verdeling die minstens zo goed is voor A én B en strikt beter voor A of B. Stel dat deze andere verdeling strikt beter is voor A, waarbij A een totale waardering $\tilde{T}_a$ heeft gekregen en B een totale waardering $\tilde{T}_b$.
Ofwel:

- $\tilde{T}_a > T_a$
- $\tilde{T}_b \geq T_b$.

In de nieuwe verdeling hebben we fracties $\tilde{a}_i$ en $\tilde{b}_i$ waarvoor voor geldt: $\tilde{a}_i > a_i$ en $\tilde{b}_i \geq b_i$ met $i = 1, ..., n$.

Laat, zonder verlies van algemeenheid, $R = \{i|\tilde{a}_i > a_i\} = \{1, ..., k\}$, A krijgt in de nieuwe verdeling meer van de goederen $G_1, ..., G_k$. En laat $S = \{i|\tilde{a}_i \leq a_i\} = \{k+1, ..., n\}$, B krijgt in de nieuwe verdeling van de goederen $G_{k+1}, ..., G_n$ minstens evenveel.

Er geldt dus:

$$\tilde{T}_a - T_a = \sum_{i=1}^{k} (\tilde{a}_i - a_i) A_i + \sum_{i=k+1}^{n} (\tilde{a}_i - a_i) A_i > 0 \tag{1}$$

en

$$\tilde{T}_b - T_b = \sum_{i=1}^{k} (a_i - \tilde{a}_i) B_i + \sum_{i=k+1}^{n} (a_i - \tilde{a}_i) B_i \geq 0, \tag{2}$$

waarbij $(\tilde{a}_i - a_i)$ voor $i = 1, ..., k$ de fractie van goed G_i is dat A extra krijgt van B. Net zo:

- $(\tilde{a}_i - a_i)$ voor $i = k+1, ..., n$ is de fractie van goed G_i die A afstaat aan B.
- $(a_i - \tilde{a}_i)$ voor $i = 1, ..., k$ is de fractie van goed G_i die B afstaat aan A.
- $(a_i - \tilde{a}_i)$ voor $i = k+1, ..., n$ is de fractie van goed G_i die B krijgt van A.

Er geldt: (volgt uit (2))

$$\sum_{i \in S} (a_i - \tilde{a}_i) B_i \geq \sum_{i \in R} (\tilde{a}_i - a_i) B_i.$$

Oftewel $\sum_{i \in S} (a_i - \tilde{a}_i) B_i$ is de som van de fracties die B krijgt van A en $\sum_{i \in R} (\tilde{a}_i - a_i) B_i$ is de som van de fracties die B aan A geeft en B is minstens zo goed af als er geruild wordt.

We willen nu bewijzen dat er voor A één goed uit $G_1, ..., G_k$ is zodanig dat als B aan haar een deel van de fractie $(\tilde{a}_i - a_i)$ van dit goed geeft en A hier een compensatie voor geeft aan B (d.w.z. een fractie van goederen $G_{k+1}, ..., G_n$ teruggeeft), dat ook A beter af is met deze ruil.

$\forall i \in R$ gaan we fractie $\theta^i = (\theta^1_{k+1}, ..., \theta^1_n)$ van $(\tilde{a}_{k+1} - a_{k+1}), ..., (\tilde{a}_n - a_n)$ bepalen zodat dat geldt:

$$(\tilde{a}_i - a_i) B_i = \sum_{j=k+1}^{n} \theta^i_j (a_j - \tilde{a}_j) B_j. \tag{3}$$

Waarbij dus $(\tilde{a}_i - a_i) B_i$ het deel dat B kwijtraakt aan A en $\sum_{j=k+1}^{n} \theta^i_j (a_j - \tilde{a}_j) B_j$ deel dat B terug krijgt van A (de eerdergenoemde compensatie).

Laat $i = 1$. We gaan $\theta^1 = (\theta^1_{k+1}, ..., \theta^1_n)$ bepalen. Voor goed G_{k+1} geldt (volgt uit (3)):

- als $(\tilde{a}_1 - a_1)B_1 \geq (a_{k+1} - \tilde{a}_{k+1})B_{k+1}$, dan geldt $\theta^1_{k+1} = 1$.
- als $(\tilde{a}_1 - a_1)B_1 < (a_{k+1} - \tilde{a}_{k+1})B_{k+1}$, dan geldt $\theta^1_{k+1} = \frac{(\tilde{a}_1 - a_1)B_1}{a_{k+1} - \tilde{a}_{k+1}B_{k+1}}$.

Hetzelfde geldt voor de goederen $G_{k+2}, ..., G_n$.

Nu hebben we goed G_1 'afgewerkt'.
We verwijderen $i = 1$ uit R en we verlagen $(a_j - \tilde{a}_j)$ met $\theta^1_j(a_j - \tilde{a}_j),\ j \in S$. We krijgen dan de volgende nieuwe fractie: $(a'_j - \tilde{a}'_j) = (1 - \theta^1_j)(a_j - \tilde{a}_j)$.
Dan geldt: $\sum_{j=k+1}^n (a'_j - \tilde{a}'_j)B_j \geq \sum_{i=2}^k (\tilde{a}_i - a_i)B_i$.
Oftewel: Wat B van A krijgt is nog steeds minstens even goed als wat hij aan A afgeeft.

Dit herhalen we voor $i = 2, ..., k$, ofwel tot $R = \emptyset$.
We zien dan dat de nieuwe verdelingen niet slechter zijn voor B. We moeten nu laten zien dat deze nieuwe verdelingen ook minstens zo goed zijn voor A.

Stel dat voor A alle nieuwe verdelingen slechter zijn. Dan geldt:

$$(\tilde{a}_1 - a_1)A_1 < \sum_{j=k+1}^n \theta^1_j(a_j - \tilde{a}_j)A_j.$$

Het deel $(\tilde{a}_1 - a_1)A_1$ dat A erbij krijgt is kleiner dan de som van de fracties van goederen $G_{k+1}, ..., G_n$ die ze weggeeft. Dit geldt $\forall i \in R$:

$$(\tilde{a}_2 - a_2)A_2 < \sum_{j=k+1}^n \theta^2_j(1 - \theta^1_j)(a_j - \tilde{a}_j)A_j$$

$$\vdots$$

$$(\tilde{a}_k - a_k)A_k < \sum_{j=k+1}^n \theta^k_j(1 - \theta^{k-1}_j) \cdots (1 - \theta^1_j)(a_j - \tilde{a}_j)A_j.$$

Er geldt dus:

$$\sum_{i=1}^k (\tilde{a}_i - a_i)A_i < \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^n \theta^i_j(1 - \theta^{i-1}_j) \cdots (1 - \theta^1_j)(a_j - \tilde{a}_j)A_j.$$

Maar er geldt (volgt uit (1)):

$$\sum_{i=1}^k (\tilde{a}_i - a_i)A_i \geq \sum_{i=k+1}^n (a_i - \tilde{a}_i)A_i.$$

We hebben een tegenspraak.

Er bestaat dus een i, zeg $i = 1$, zodat:

$$(\tilde{a}_1 - a_1)A_1 = \sum_{j=k+1}^n \theta^1_j(a_j - \tilde{a}_j)A_j.$$

Dus B staat fractie $(\tilde{a}_1 - a_1)$ van goed G_1 af aan A en A staat fracties $\theta^1_j(a_j - \tilde{a}_j)$ van goederen $G_{k+1}, ..., G_n$ af aan B.

De nieuwe verdeling is dus:
A heeft:

$$\tilde{a}_1 \text{ van } G_1$$

$$a_2 \text{ van } G_2$$

$$\vdots$$

$$a_k \text{ van } G_k$$

$$a_{k+1} - \theta^1_{k+1}(a_{k+1} - \tilde{a}_{k+1}) \text{ van } G_{k+1}$$

$$\text{enz. voor } j = k+2, .., n \text{ van } G_j.$$

$$\vdots$$

B heeft:

$$(1 - a_1) - (\tilde{a}_1 - a_1) = 1 - \tilde{a}_1 \text{ van } G_1$$

$$1 - a_2 \text{ van } G_2$$

$$\vdots$$

$$1 - a_k \text{ van } G_k$$

$$b_{k+1}(1 - a_{k+1}) + \theta^1_{k+1}(a_{k+1} + \tilde{a}_{k+1}) \text{ van } G_{k+1}$$

$$\text{enz. voor } j = k+2, .., n \text{ van } G_j.$$

$$\vdots$$

Er geldt nu:

- $T'_a > T_a$
- $T'_b \geq T_b$.

En:

$$T'_a - T_a = (\tilde{a}_1 - a_1)A_1 - \sum_{i=k+1}^{n} \theta^1_j(a_j - \tilde{a}_j)A_j \geq 0$$

$$T'_b - T_b = (a_1 - \tilde{a}_1)B_1 + \sum_{i=k+1}^{n} \theta^1_j(a_j - \tilde{a}_j)B_j \geq 0.$$

We zien nu dat er een verdeling bestaat die minstens zo goed is voor B en strikt beter voor A, die verkregen is door de ruil van een deel van een fractie van één goed, zeg G_1, van B tegen delen van fracties van goederen $G_{k+1}, ..., G_n$ van A.

We kunnen nu op analoge wijze laten zien dat er een verdeling verkregen kan worden die strikt beter is voor A en minstens zo goed voor B, door de ruil van een deel van een fractie van goed G_1 van B tegen een deel van een fractie van één goed van A, zeg G_{k+1}.

Er volgt dus dat uit een niet-efficiënte verdeling een verdeling verkegen kan worden die minstens zo goed is voor beiden en strikt beter voor één van beiden, door een deel van een fractie van één goed van A tegen een deel van een fractie van één goed van B te ruilen. $\square$

Nu we dit lemma hebben bewezen kunnen we het efficiënt zijn van elke verdeling die de 'adjusted winner procedure' oplevert bewijzen.

Stel dat de 'adjusted winner procedure' een niet-efficiënte verdeling oplevert. Uit lemma 3.5 volgt dat er goederen G_i en G_j bestaan zodanig dat als A een deel θ_i van haar fractie $a_i > 0$ van goed G_i met een deel θ_j van B's fractie $b_j > 0$ van goed G_j ruilt, dat de verdeling resulterend uit de ruil strikt beter is voor de een en minstens zo goed voor de ander.
Dan geldt (zonder verlies van algemeenheid):

$$\theta_j b_j A_j - \theta_i a_i A_i > 0,$$

$$\theta_i a_i B_i - \theta_j b_j B_j \geq 0.$$

Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat $\theta_i = \theta_j = 1$. Hieruit volgt:

$$b_j A_j > a_i A_i \;\Rightarrow\; \frac{b_j}{a_i} > \frac{A_i}{A_j}$$

$$a_i B_i \geq b_j B_j \;\Rightarrow\; \frac{B_i}{B_j} \geq \frac{b_j}{a_i}.$$

Oftewel:

$$\frac{A_j}{B_j} > \frac{A_i}{B_i}. \tag{4}$$

Nu zijn er twee mogelijkheden: A was de 'aanvankelijke winnaar' of B was dat. We gaan eerst kijken naar de situatie waarin A de 'aanvankelijke winnaar' was, dus $T_a > T_b$.
A gaat een deel van haar fractie $a_i > 0$ ruilen, dus A moet in stap 1 van de 'adjusted winner procedure' goed G_i gekregen hebben. Er geldt dus $A_i \geq B_i$. Stel dat $B_j \geq A_j$ geldt, dan volgt:

$$\frac{A_i}{B_i} \geq 1 \geq \frac{A_j}{B_j}.$$

Dit is in tegenspraak met (4), dus er geldt $B_j \leq A_j$ in de oorspronkelijk verdeling.
Hieruit volgt dat B de fractie $b_j > 0$ van goed G_j in de oorspronkelijke verdeling in stap 3 van de 'adjusted winner procedure' heeft moeten krijgen. Uit (4) volgt dat in stap 3 van de procedure eerst (een deel van) goed G_i aan B wordt afgestaan. Er mag echter maar één goed opgesplitst worden, dus dan zou A geheel G_i aan B hebben moeten geven omdat $b_i > 0$. Dan geldt $a_i = 0$, maar er geldt $a_i > 0$. We hebben dus een tegenspraak.

We gaan nu de situatie bekijken waarin B de 'aanvankelijke winnaar' was, dus $T_b > T_a$.
We herschrijven (4), dan:

$$\frac{B_j}{A_j} < \frac{B_i}{A_i}. \tag{5}$$

B heeft een fractie $b_j > 0$ van goed G_j, deze moet hij gekregen hebben in stap 1 van de 'adjusted winner procedure'. Er geldt dus $B_j \geq A_j$. Stel dat $A_i \geq B_i$ geldt, dan volgt:

$$\frac{B_j}{A_j} \geq 1 \geq \frac{B_i}{A_i}.$$

Dit is in tegenspraak met (5), dus er geldt $A_i \leq B_i$ in de oorspronkelijke verdeling.
Hieruit volgt dat A de fractie $a_i > 0$ van goed G_i in de oorspronkelijke verdeling in stap 3 van de 'adjusted winner procedure' heeft moeten krijgen. Uit (5) volgt dat in stap 3 van de procedure (een deel van) goed G_j aan A is afgestaan. Er mag maar één goed opgesplitst worden, dus B moet heel goed G_j aan A hebben gegeven in stap 3 van de procedure. Dit betekent dat $b_j = 0$ geldt, wat een tegenspraak is.

De 'adjusted winner procedure' is dus wel efficiënt.

□

In het boek 'Mathematics and Politics - Stratery, Voting, Power and Proof' van Alan D. Taylor en Allison M. Pacelli[1], dat we voornamelijk gebruikt hebben, worden voor het bewijs van het efficiënt zijn van de 'adjusted winner procedure' twee extra lemma's gebruikt. Deze twee lemma's bleken we echter niet nodig te hebben. Hieronder zullen we deze twee lemma's toch laten zien en bewijzen, omdat we ze in eerste instantie gebruikt hadden en de bewijzen van de lemma's uit het eerdergenoemde boek niet helemaal bleken te kloppen.

Lemma 3.6. *Veronderstel dat we de goederen G_i en G_j met $i, j = 1, ..., n$ en $i \neq j$ hebben. Stel dat voor G_i en G_j geldt:*

(1) $A_i \geq B_i$;

(2) $B_j \geq A_j$.

Stel A ruilt haar fractie $a_i > 0$ van G_i, die ze krijgt in een gegeven verdeling, voor B's fractie $b_j > 0$ van G_j, die hij krijgt in een gegeven verdeling. De ruil is dan strikt beter voor de een en strikt slechter voor de ander.

Bewijs: Er geldt $A_i \geq B_i$ en $B_j \geq A_j$.
Het is voldoende om te bewijzen dat er twee goederen, zeg G_i en G_j, zijn waarvoor het lemma geldt. Alle andere goederen mogen we 'vergeten'.

We weten dat $a_i > 0$ de fractie van G_i is die A krijgt in de verdeling van de goederen. A_i is het aantal waarderingspunten dat A aan het goed G_i toekent. Hieruit volgt dat $a_i A_i$ het aantal waarderingspunten is dat A heeft gekregen in de gegeven verdeling.
In de ruil geeft A $a_i A_i$ punten aan B weg en krijgt er $b_j A_j$ (het aantal waarderingspunten dat A van G_j krijgt volgens haar waardering na de ruil met B) voor terug. B krijgt $a_i B_i$ punten terug voor de $b_j B_j$ punten die hij aan A weggeeft.

Stel dat de ruil strikt beter is voor A, dan geldt dus: $b_j A_j > a_i A_i$ ($b_j > 0$).
Het verschil in aantal punten voor en na de ruil is voor B gelijk aan: $a_i B_i - b_j B_j$. Er geldt dan:

$$\begin{aligned} a_i B_i - b_j B_j &\leq a_i A_i - b_j B_j && (A_i \geq B_i) \\ &\leq a_i A_i - b_j A_j && (B_j \geq A_j) \\ &< 0 && (b_j A_j > a_i A_i). \end{aligned}$$

Dus de ruil is strikt slechter voor B.

Als de ruil strikt beter is voor B ($a_i B_i > b_j B_j$), dan volgt analoog dat de ruil strikt slechter is voor A:

$$\begin{aligned} b_j A_j - a_i A_i &\leq b_j B_j - a_i A_i && (B_j \geq A_j) \\ &\leq b_j B_j - a_i B_i && (A_i \geq B_i) \\ &< 0 && (a_i B_i > b_j B_j). \end{aligned}$$

□

Lemma 3.7. *Veronderstel dat we de goederen G_i en G_j met $i, j = 1, ..., n$ en $i \neq j$ hebben. Stel dat voor G_i en G_j geldt: $\frac{A_j}{B_j} \leq \frac{A_i}{B_i}$.*
Stel A ruilt haar fractie $a_i > 0$ van G_i voor B's fractie $b_j > 0$ van G_j. Als de ruil strikt beter is voor de een, dan is de ruil strikt slechter voor de ander.

Bewijs: Stel de ruil is strikt beter voor A, dan geldt $b_j A_j > a_i A_i$.
Uit $\frac{A_j}{B_j} \leq \frac{A_i}{B_i}$ volgt $A_j B_i \leq A_j B_i$.

Het verschil in aantal punten voor en na de ruil is voor B gelijk aan: $a_i B_i - b_j B_j$. Er geldt dan:

$$\begin{aligned} a_i B_i - b_j B_j &< \left(\frac{b_j A_j}{A_i}\right) B_i - b_j B_j && (b_j A_j > a_i A_i \Rightarrow a_i < \frac{b_j A_j}{A_i}) \\ &= \frac{b_j A_j B_i}{A_i} - \frac{b_j B_j A_i}{A_i} \\ &= b_j \left(\frac{A_j B_i - B_j A_i}{A_i}\right) \\ &\leq 0 && (A_j B_i \leq A_i B_j). \end{aligned}$$

Dus $a_i B_i - b_j B_j < 0$. Oftewel, de ruil is strikt slechter voor B.

Analoog geldt: stel dat de ruil strikt beter voor B, dan geldt $a_i B_i > b_j B_j$. Dan volgt:

$$\begin{aligned} b_j A_j - a_i A_i &< \left(\frac{a_i B_i}{B_j}\right) A_j - a_i A_i && (a_i B_i > b_j B_j \Rightarrow b_j < \frac{a_i B_i}{B_j}) \\ &= \frac{a_i B_i A_j}{B_j} - \frac{a_i A_i B_j}{B_j} \\ &= a_i \left(\frac{B_i A_j - A_i B_j}{B_j}\right) \\ &\leq 0 && (A_j B_i \leq A_i B_j). \end{aligned}$$

Dus $b_j A_j - a_i A_i < 0$. Oftewel, de ruil is strikt slechter voor A.

$\square$

Bewijs jaloezie-vrijheid:
Dat de procedure jaloezie-vrij is volgt uit de andere twee criteria.

Stel dat de procedure efficiënt en onpartijdig is en stel dat de procedure niet jaloezie-vrij is.
Uit propositie 2.6 volgt dat het jaloezie-vrij zijn en proportioneel zijn van een procedure equivalent zijn.
Dan krijgt dus één iemand minder dan $\frac{1}{2}^{\text{de}}$ deel van het totaal volgens zijn waardering.
Met het onpartijdig zijn van de procedure volgt dat beide deelnemers minder dan $\frac{1}{2}^{\text{de}}$ deel krijgen van het totaal volgens hun eigen waardering.
De procedure is dus niet efficiënt, want als beiden nu hun goederen aan de andere geven (waarbij de goederen waarde $x < 50$ hebben) dan hebben beide $100 - x > 50$ punten gekregen volgens hun eigen waardering. We hebben een tegenspraak. $\square$

De 'adjusted winner procedure' is zoals bovenstaand bewezen een goede procedure om een eerlijke verdeling te krijgen voor twee personen.
We gaan nu enkele verschillende situaties bekijken waarop de procedure wordt toegepast.

3.2 Enkele voorbeelden en toepassingen

Elk van de hieronder besproken voorbeelden beschrijft een andere situatie waarin met behulp van de 'adjusted winner procedure' de goederen verdeeld worden.

Voorbeeld 3.8. Stel de personen A en B gaan scheiden en ze hebben vijf goederen die verdeeld moeten worden. Zij geven aan elk goed hun waardering, met een totaal aantal punten van 100:

A	Goederen	B
35	Appartement	30
20	Mini-cooper	20
15	Piano	20
5	TV	10
5	Zeilboot	10
20	Hond	10
100		100

STAP 1.

We gaan de goederen verdelen door eerst de goederen waarvoor A en B geen gelijke waardering hebben gegeven aan de persoon te geven die de hoogste waardering heeft voor de goederen. De goederen met gelijke waardering worden hierna één-voor-één aan de persoon gegeven die op dat moment het laagste totale aantal punten heeft. We krijgen:

A		B	
Appartement	35	Piano	20
Hond	20	TV	10
		Zeilboot	10
	55		40
		Mini-Cooper	20
			60

B is dus de 'aanvankelijke winnaar'.

STAP 2.

A en B hebben in deze verdeling niet hetzelfde totale aantal waarderingspunten gekregen (dus de verdeling is nog niet onpartijdig). We gaan de verdeling aanpassen.

STAP 3.

We gaan eerst de ratio's bepalen van de goederen van B:

Mini-Cooper $= \frac{20}{20} = 1.$

Zeilboot $= \frac{10}{5} = 2.$

TV $= \frac{10}{5} = 2.$

Piano $= \frac{20}{15} = 1\frac{1}{3}.$

Omdat de Mini-Cooper de kleinste ratio heeft, gaan we deze opnieuw verdelen over A en B.
A moet x meer krijgen voor een onpartijdige verdeling en B houdt dus $1 - x$. Dus:

$$50+20x = 40 + 20(1-x) = 60 - 20x$$
$$\Rightarrow \quad 40x = 5$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{8}.$$

A krijgt dus $\frac{1}{8}^{\text{ste}}$ deel van haar waardering voor de Mini-Cooper erbij en B verliest $(1-\frac{1}{8})^{\text{ste}}$ deel van zijn waardering voor de Mini-Cooper.

Dus:
A: $20 \cdot \frac{1}{8} = 2\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 55 + 2\frac{1}{2} = 57\frac{1}{2}$ is het totale aantal waarderingspunten dat A nu toegekend is.

B: $20 \cdot \frac{7}{8} = 17\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 40 + 17\frac{1}{2} = 57\frac{1}{2}$ is het totale aantal waarderingspunten dat B nu toegekend is.

A en B hebben nu een gelijke aantal waarderingspunten gekregen. De verdeling is nu eerlijk en:
A krijgt het appartement, de hond en $\frac{1}{8}^{\text{ste}}$ deel van de Mini-Cooper.
B krijgt de piano, de TV, de zeilboot en $\frac{7}{8}^{\text{ste}}$ deel van de Mini-Cooper

Uiteraard is het onmogelijk om ondeelbare goederen te verdelen, want aan bijvoorbeeld $\frac{1}{8}^{\text{ste}}$ deel van een Mini-Cooper heeft niemand iets. Om dit op te lossen kan het goed verkocht worden en wordt de opbrengst onder de berekende verhouding verdeeld. In bovenstaande voorbeeld zouden A en B $\frac{1}{8}^{\text{ste}}$ respectievelijk $\frac{7}{8}^{\text{ste}}$ deel van de opbrengst krijgen.
Een andere oplossing is dat A uitgekocht wordt door B. Dan betaalt B aan A $\frac{1}{8}^{\text{ste}}$ deel van de (getaxeerde) waarde van de Mini-Cooper.

Voorbeeld 3.9. In het vorige voorbeeld waren we na één keer stap 3 doorlopen klaar. We gaan nu kijken naar een voorbeeld waarbij we niet na één keer stap 3 doorlopen klaar zijn, maar dat na een eindig aantal stappen er wel een verdeling verkregen wordt waarin A en B eenzelfde deel hebben gekregen volgens hun eigen waarderingen.

De drie goederen moeten over A en B verdeeld worden. A en B hebben deze goederen de volgende waarderingen gegeven:

A	Goederen	B
10	1	9
70	2	61
30	3	30
100		100

STAP 1.
$a_1 = 1,\ T_a = 10$
$a_2 = 1,\ T_a = 80$
$b_3 = 1,\ T_b = 30.$

STAP 2.
$T_a = 80 \neq T_b = 30$

STAP 3.
Voor $i = 1 :\ \frac{10}{9}$
Voor $i = 2 :\ \frac{70}{61}$
We gaan dus goed 1 herverdelen over A en B:

$x = \frac{80-30}{0+10} = \frac{50}{19} > 1.$
Dus:

$T_a = 80 - 10 = 70$
$T_b = 30 + 9 = 39.$

Er geldt $T_a > T_b$. A heeft alleen goed 2 nog over, dus dit gaat we herverdelen over A en B:
$x = \frac{70-39}{70+61} = \frac{31}{131} < 1.$
Dus:

$T_b = 39 + 61 \cdot \frac{31}{131} = 53\frac{57}{131}$
$T_a = (70 - 70) + 70\left(1 - \frac{31}{131}\right) = 53\frac{31}{131}.$
Nu geldt $T_a = T_b$, dus we hebben nu een eerlijke verdeling waarin A $\frac{100}{131}^{\text{ste}}$ van goed 2 krijgt en B goederen 1, 3 en $\frac{31}{131}$ van 2.

Voorbeeld 3.10. In sommige huwelijken worden er huwelijksvoorwaarden vastgelegd. Een van deze voorwaarden kan te maken hebben met de verdeling van de eigendommen bij een scheiding. Zo kan het bijvoorbeeld zijn vastgelegd dat A 60% van de eigendommen krijgt en B 40%. Wordt de 'adjusted winner procedure' gebruikt om de goederen te verdelen, dan betekent dit dat in stap 3 A's totale aantal punten anderhalf keer zo groot als dat van B moet worden.

Stel we gaan 5 goederen verdelen over A en B aan welke zij de volgende waarderingen hebben gegeven:

A	Goederen	B
35	1	30
20	2	15
15	3	25
15	4	20
15	5	10
100		100

We gaan de adjusted winner procedure toepassen:

STAP 1.

$a_1 = 1,\ T_a = 35$
$a_2 = 1,\ T_a = 35 + 20 = 55$
$b_3 = 1,\ T_b = 25$
$b_4 = 1,\ T_b = 25 + 20 = 45$
$a_5 = 1,\ T_a = 55 + 15 = 70.$

STAP 2.

$\frac{2}{3}T_a \neq T_b.$

STAP 3.

$\frac{2}{3}T_a > T_b$, dus we gaan van de goederen die A in eerste instantie heeft gekregen de ratio's bepalen:
Voor $i = 1:\ \frac{35}{30} = 1\frac{1}{6}.$
Voor $i = 2:\ \frac{20}{15} = 1\frac{1}{3}.$
Voor $i = 5:\ \frac{15}{10} = 1\frac{1}{2}.$
We gaan dus goed 1 herverdelen over A en B:

A krijgt een totaal aantal punten dat anderhalf keer zo groot is als dat van B. Er moet dus gelden na het herverdelen van goed 1: $\frac{2}{3}T_a = T_b$. Dus:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{2}{3} \cdot (70 - 35) + 35 \cdot (1 - x) = 45 + 30x \\
\Rightarrow\ & 23\tfrac{1}{3} + 23\tfrac{1}{3} - 23\tfrac{1}{3}x &&= 45 + 30x \\
\Rightarrow\ & 46\tfrac{2}{3} - 23\tfrac{1}{3}x &&= 45 + 30x \\
\Rightarrow\ & 1\tfrac{2}{3} &&= 53\tfrac{1}{3}x \\
\Rightarrow\ & x &&= \tfrac{1}{32}
\end{aligned}$$

Dus:
$T_b = 45 + 30 \cdot \frac{1}{32} = 45\frac{15}{16}$
$T_a = (70 - 35) + 35\left(1 - \frac{1}{32}\right) = 68\frac{29}{32}.$
Nu geldt $\frac{2}{3}T_a = T_b$.
Dus met de vastgelegde eisen hebben we nu een eerlijke verdeling waarbij A goederen 2 en 5 en $\frac{31}{32}^{\text{ste}}$ deel van goed 1 krijgt. B krijgt goederen 3 en 4 en $\frac{1}{32}^{\text{ste}}$ deel van goed 1.

Naast de 'adjusted winner procedure' zijn er waarschijnlijk nog andere algoritmes die voor 2 personen altijd een eerlijke verdeling opleveren. Maar omdat de 'adjusted winner procedure' een gemakkelijk en kloppend algoritme is, zullen wij niet verder kijken naar andere procedures.

Tot nu toe is gekeken naar de 'eenvoudige' situatie met twee personen, maar het zal natuurlijk ook vaak voorkomen dat er één of meer goederen verdeeld moeten worden over $n > 2$ personen. Ook dan willen we dat de verdeling voldoet aan de drie eerlijkheidscriteria. In het volgende hoofdstuk wordt dit probleem besproken.

4 Verdeling over meer dan twee personen

4.1 Het onmogelijkheidsprobleem

In het vorige hoofdstuk hebben we laten zien dat er voor twee personen een procedure bestaat die aan de drie eerlijkheidscriteria voldoet. De vraag is nu of er ook procedures bestaan voor meer dan twee mensen die (ook) een 'eerlijke' verdeling oplevert.

We beweren het volgende:
Bewering 4.1. Er zal nooit een procedure voor meer dan twee personen gevonden worden die aan de drie eerlijkheidscriteria voldoet.

Dit noemen we het '*onmogelijkheidsprobleem*'. We kunnen met behulp van een voorbeeld bewijzen dat er geen procedure bestaat en ook nooit gevonden zal worden.

Bewijs onmogelijkheidsprobleem: Stel er bestaat een procedure die voor drie personen een verdeling oplevert die aan alle drie de eerlijkheidscriteria voldoet.
We bekijken het volgende voorbeeld met 3 personen:

	A	B	C
Goed 1	64	46	43
Goed 2	30	31	20
Goed 3	6	23	37
Totaal	100	100	100

Er volgt:

- A, B en C waarderen allen goed 1 het meest. Dus de twee personen die goed 1 niet krijgen, zijn 'jaloers' op de persoon die goed 1 wel krijgt. De verdeling is dus niet jaloezie-vrij. Ook als we efficiëntie en onpartijdigheid opgeven om een jaloezie-vrije oplossing te vinden, lukt dit niet.
- Alle waarderingen zijn ongelijk $\Rightarrow$ er is geen onpartijdige oplossing. We kunnen geen onpartijdige oplossing vinden ongeacht of we efficiëntie en jaloezie-vrij opgeven.
- Er bestaat wel een efficiënte oplossing, namelijk: A-1, B-2, C-3.
  De enige andere oplossing die voor B of C beter is, is goed 1 aan één van hen geven, maar dit schaadt echter A.

We zien dus dat er geen oplossing te vinden is die aan alle drie de eerlijkheidscriteria voldoet. □

In bovenstaande voorbeeld hebben we de goederen niet in delen verdeeld om, net als bij de 'adjusted winner procedure' voor twee personen, zo mogelijk een eerlijke verdeling te krijgen. Dit hebben we niet gedaan omdat het ontoereikend is, ongeacht of we één of meer goederen zouden splitsen.[6]

We kunnen dus concluderen dat *alleen als er altijd* een oplossing te vinden is voor een verdeling over n personen die voldoet aan de drie eerlijkheidscriteria, er een 'correcte' procedure bestaat.
Een algoritme dat altijd een eerlijke verdeling oplevert kunnen we niet vinden. Waar eventueel naar gekeken kan worden zijn procedures die aan twee van de drie eerlijkheidcriteria voldoen, om toch een zo eerlijk mogelijke verdeling te krijgen. Dit zullen we in de volgende paragraaf bespreken.

4.2 Procedure voor drie personen

Propositie 2.6 zegt ons dat voor $n > 2$ personen jaloezie-vrijheid een sterkere eigenschap is dan proportionaliteit. We kunnen naar verdelingen kijken die proportioneel zijn, maar niet noodzakelijk jaloezie-vrij. Jaloezie-vrij is meer gewenst, maar moeilijker om aan te voldoen.
Tevens is het over het algemeen moeilijk om een procedure te vinden voor $n > 2$ personen die én jaloezie-vrij én efficiënt is.[7] Er zijn dan namelijk veel meer condities nodig (waar we niet verder over zullen uitwijden). Daarnaast is de verdeling van de goederen afhankelijk van de volgorde waarin de procedure wordt uitgevoerd (zie voorbeeld 4.3 en 4.4).

Omdat jaloezie-vrijheid (vaak) de 'belangrijkste' eis is voor mensen in een verdeling, zullen wij nu gaan kijken naar een procedure die wel altijd een jaloezie-vrije verdeling zal opleveren voor $n > 2$. Situaties waarin meerdere goederen over meerdere mensen verdeeld moeten worden (die we niet willen splitsen), zijn over het algemeen erg moeilijk daar niet aan alle drie de eerlijkheidcritera voldaan kan worden (zie hoofdstuk 4.1). Daarom zullen we alleen nog kijken naar de verdeling van één goed over meerdere mensen. Het volgende algoritme heeft een jaloezie-vrije verdeling van één (deelbaar) goed over n mensen. Voor het gemak zullen we kijken naar $n = 3$, maar alles wat wordt besproken geldt voor alle $n > 2$.

Algoritme 4.2. 'Selfridge-Conway procedure'[8]
A, B en C gaan een cake onder elkaar verdelen.

STAP 1.
A snijdt de cake in 3 stukken die zij als gelijk waardeert.

STAP 2.
B snijdt van het stuk dat hij het grootste acht een stuk, zodanig dat minstens twee stukken volgens zijn waardering even groot zijn en minstens even hoge waardering hebben als het derde stuk. (Als hij twee of alle stukken al even groot acht, dan snijdt hij niks af.)
Het stuk dat is afgesneden wordt opzij gelegd en een 'trimming' genoemd.

STAP 3.

(a) C kiest het stuk dat hij meest waardeert.

(b) B kiest één van de volgens hem even grote stukken.
Als het getrimde stuk over is, moet hij dat nemen.

(c) A krijgt het laatste stuk.

STAP 4. Nu gaan we de trimming verdelen. Stel dat C het getrimde stuk had gekozen. B snijdt nu de trimming(s) in 3 stukken die hij gelijk waardeert.

STAP 5. C kiest als eerste een stuk, daarna A en als laatste B.

N.B.: Als B het getrimde stuk moet nemen, dan mag C de trimming in 3 stukken snijden bij stap 4 en kiest B als eerste en C als laatste in stap 5.

We gaan bewijzen dat deze procedure jaloezie-vrij is.

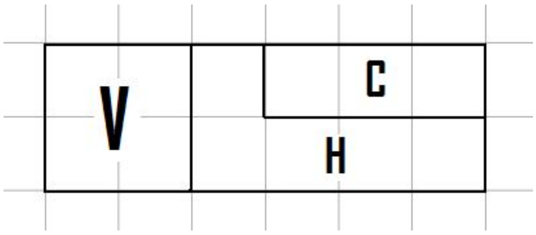
Bewijs jaloezie-vrij:
Na stap 3 is de verdeling jaloezie-vrij, namelijk:
C koos als eerste een stuk en is dus op niemand jaloers.
B krijgt één van de stukken die hij beiden even groot vond, dus is ook niet jaloers op iemand.
Omdat A de cake in gelijke stukken had verdeeld volgens haar waardering en omdat C of B het getrimde stuk heeft, krijgt A een orgineel stuk en is ze ook niet jaloers op een ander.

We nemen aan dat C het getrimde stuk heeft.
Na de verdeling van de trimming(s) is C niet jaloers op iemand, omdat hij als eerste koos.
A is niet jaloers op B, omdat ze vóór hem een stuk heeft gekozen en zij haar stuk dus meer waardeert.
A is ook niet jaloers op C, omdat C het getrimde stuk heeft gekregen, dat dus kleiner is dan het oorspronkelijke deel dat A waarde $\frac{1}{3}$ gaf. Als C nu alle trimming(s) minus de trimming van A krijgt, dan is dat stuk nog steeds kleiner dan het oorsponkelijke stuk. Dus A is niet jaloers op C.
B is op niemand jaloers, omdat hij volgens zijn waardering de trimming(s) in gelijke stukken heeft verdeeld en hij er één van heeft gekregen. $\square$

Met behulp van twee voorbeelden gaan we laten zien dat deze procedure niet efficiënt en niet onpartijdig is.

Voorbeeld 4.3 (Onpartijdigheid)**.**
We gaan laten zien dat de procedure niet onpartijdig is.

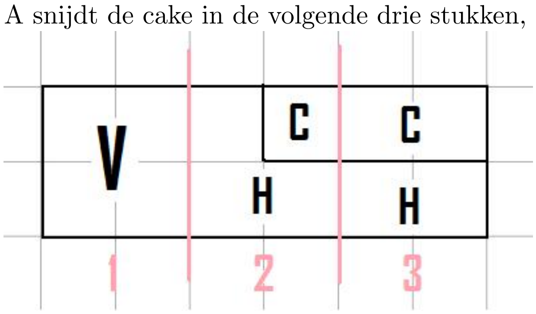
Veronderstel we hebben een cake met de smaken vanille (V), hazelnoot (H) en chocolade (C) en deze is alsvolgt verdeeld:



Verder geldt:
A vindt alle smaken lekker.
B wil alleen chocolade.
C houdt van chocolade en hazelnoot, vanille wil hij niet.

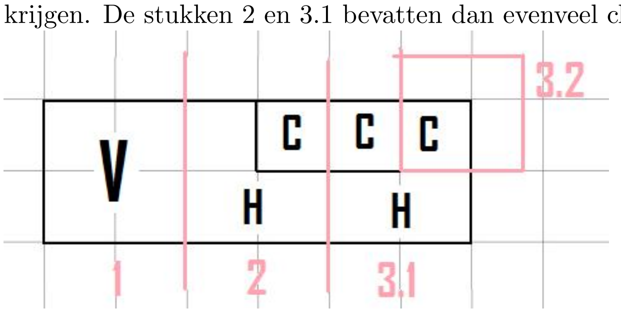
We gaan de 'Selfridge-Conway procedure' toepassen:

Stap 1:
A snijdt de cake in de volgende drie stukken, die volgens haar waardering even groot zijn:



Dus:
Deel 1: VVVV
Deel 2: HHHC
Deel 3: HHCC.

Stap 2:
B snijdt in stuk 3 het chocoladedeel door midden, zodat stuk 2 en 3.1 dezelfde waardering voor hem krijgen. De stukken 2 en 3.1 bevatten dan evenveel chocolade.



Stap 3:

(a) C wil chocolade en hazelnoot, dus C kiest stuk 2. Dit stuk is volgens zijn waardering 50% van het geheel.

(b) B krijgt stuk 3.1, wat volgens zijn waardering $33\frac{1}{3}\%$ van het geheel is.

(c) A krijgt stuk 1, wat volgens haar waardering $33\frac{1}{3}\%$ van het geheel is.

Stap 4:
C deelt het stuk 3.2 in drie stukken.

Stap 5:
A,B en C krijgen er allen '$\frac{1}{3}^{\text{de}}$' van het stuk 3.2 bij volgens eigen waarderingen. Oftewel:

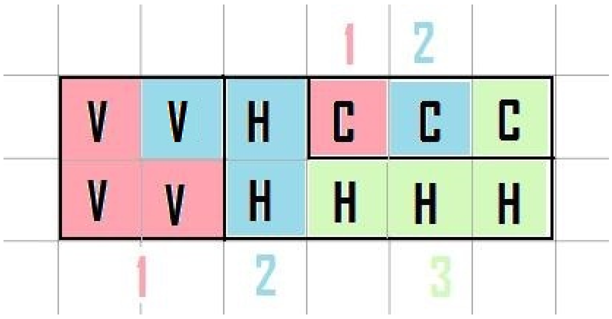
A heeft $36\frac{1}{9}\%$ volgens haar waardering.
B heeft $44\frac{4}{9}\%$ volgens zijn waardering.
En C heeft $54\frac{1}{6}\%$ volgens zijn waardering in de verkregen verdeling.

Dus de procedure is niet onpartijdig.

Voorbeeld 4.4 (Efficiëntie)**.**
We gaan nu laten zien dat de procedure ook niet efficiënt is.
We hebben weer dezelfde cake als bij voorbeeld 4.3 en A, B en C hebben nog steeds dezelfde voorkeuren.

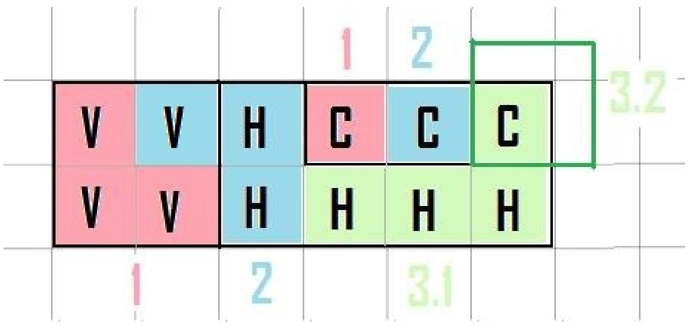
Met de 'Selfridge-Conway procedure' vinden we het volgende:

Stap 1:
Stel dat B nu begint met snijden. B snijdt de cake in de volgende stukken, die naar zijn waardering gelijk aan elkaar zijn. Hierbij snijdt hij het chocoladedeel in drie stukken, zodat hij er sowieso $\frac{1}{3}$ deel van krijgt:



Dus:
Deel 1: VVVC
Deel 2: VHHC
Deel 3: HHHC.

Stap 2:
C snijdt van stuk 3 het stuk chocolade weg, zodat stuk 2 en 3.1 voor hem gelijke (grootste) waarde krijgen. Namelijk: stuk 2 heeft twee stukken hazelnoot en een stuk chocolade en stuk 3 heeft drie stukken hazelnoot. C waardeert hazelnoot en chocolade evenveel.



Stap 3:

(a) Stel dat A stuk 1 kiest, welke volgens haar waardering $33\frac{1}{3}\%$ van het geheel is.

(b) C krijgt stuk 3.1, wat volgens zijn waardering $37\frac{1}{2}\%$ van het geheel is.

(c) B krijgt stuk 2, wat volgens zijn waardering $33\frac{1}{3}\%$ van het geheel is.

Stap 4:
A snijdt het stuk 3.2 in drie gelijke stukken.

Stap 5:
A,B en C krijgen er allen '$\frac{1}{3}^{\text{de}}$' van het stuk 3.2 bij volgens hun eigen waarderingen, want ze waarderen allen chocolade evenveel. Oftewel:

A heeft $36\frac{1}{9}\%$ volgens haar waardering.
C heeft $41\frac{2}{3}\%$ volgens zijn waardering.
En B heeft $44\frac{4}{9}\%$ volgens zijn waardering in de verkregen verdeling.

We zien dan dat de oplossing in voorbeeld 4.3 strikt beter is voor C en net zo goed voor A en B als de in dit voorbeeld gevonden oplossing, dus deze oplossing, en daarmee de procedure, is niet efficiënt.

In voorbeeld 4.3 krijgt eerst C een stuk van de cake, daarna B en als laatste A, omdat A begon met snijden van de cake. In voorbeeld 4.4 begon B met snijden en kreeg eerst A, dan C en als laatste B een stuk van de cake. De verdelingen (de percentages die mensen volgens hun waarderingen krijgen in de verdelingen) die we kregen zijn niet hetzelfde. Dit laat ons zien dat, ongeacht of de verdeling voldoet aan de drie eerlijkheidscriteria, de volgorde waarop personen (delen van) goederen krijgen bepaalt hoe de uiteindelijke verdeling eruit komt te zien. Hieruit concluderen we dat: de 'Selfridge-Conway procedure' geeft geen uniek antwoord.

5 Manipulatie van de verdeling

We zijn er in de voorgaande hoofdstukken vanuit gegaan dat deelnemers aan een verdeling eerlijk zijn, dus dat ze hun oprechte waarderingen geven aan de goederen die verdeeld moeten worden. Maar het kan echter ook zo zijn dat één of meer van de deelnemers op de hoogte zijn van de waarderingen van een ander en daarop zijn/haar eigen waarderingen zo aanpast dat hij/zij er uiteindelijk beter van af komt in de verkregen verdeling. Denk bijvoorbeeld aan een echtscheiding, waarbij je elkaar zo goed kent dat je wel weet welke waarde de ander aan elk goed zal geven. Je past je eigen waarderingen dan zo aan dat jij uiteindelijk minder hoeft te betalen om de ander uit te kopen of meer geld krijgt als een ander jou uitkoopt. Daarmee benadeel je dus de ander.

We zullen in dit hoofdstuk alleen kijken naar verdelingen over twee personen.

Er zijn verschillende situaties die kunnen plaatsvinden bij het verdelen van goederen: iedereen is eerlijk, één iemand liegt of iedereen liegt. Aan de hand van een voorbeeld zullen we deze situaties bekijken en met elkaar vergelijken.

In situaties waarbij iemand liegt omdat die de waarderingen van de ander kent, gaan we ervan uit dat degene die zijn eigen waarderingen aanpast zijn waarderingen voor het goed dat hij het meest waardeert verlaagt tot net boven de waardering die de ander aan dat goed heeft gegeven. En hij verhoogt zijn waardering voor het goed dat de ander het meest waardeert tot net onder de waardering die de ander aan dat goed heeft gegeven. Dit wordt gedaan omdat degene die zijn waardering aanpast aan die van de ander graag een zo hogere winst binnen wil halen. Op deze manier hoopt hij dat hij het goed dat hij het liefst wil hebben krijgt voor zo laag mogelijk kosten. Daarnaast hoopt hij nog zoveel mogelijk andere goederen binnen te halen.

Voorbeeld 5.1. Er moeten drie goederen verdeeld worden over A en B. Zij hebben deze goederen de volgende waarderingen gegeven:

A	Goederen	B
22	1	15
48	2	30
30	3	55
100		100

We zien dat A het liefst goed $i = 2$ wil hebben en B goed $i = 3$.

(1) We gaan eerst naar de situatie kijken waarin A en B beiden eerlijk zijn:

STAP 1.
$a_1 = 1,\ T_a = 22$
$a_2 = 1,\ T_a = 70$
$b_3 = 1,\ T_b = 55.$

STAP 2.
$T_a \neq T_b.$

STAP 3.
Voor $i = 1:\ \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}.$
Voor $i = 2:\ \frac{48}{30} = 1\frac{3}{5}.$
We gaan dus goed $i = 1$ herverdelen over A en B:

$x = \frac{70-55}{22+15} = \frac{15}{37}.$
Dus:
$T_a = (70-22) + 22 \cdot \left(1 - \frac{15}{37}\right) = 61\frac{3}{37}$
$T_b = 55 + 15 \cdot \frac{15}{37} = 61\frac{3}{37}$
$T_a = T_b.$

Dus A krijgt goed 2 en $\frac{22}{37}^{\text{ste}}$ deel van goed 1. En B krijgt goed 3 en $\frac{15}{37}^{\text{ste}}$ deel van goed 1.

(2) We kijken nu naar de situatie dat A liegt en B eerlijk is.

A wil het liefst goed $i = 2$ hebben en B het liefst $i = 3$, dus A verlaagt haar waardering van $i = 2$ tot een waardering net iets hoger dan B's waardering voor $i = 2$ en verhoogt haar waardering voor $i = 3$ tot een waardering net iets lager dan B's waardering voor $i = 3$. Veronderstel dat A de volgende waarderingen geeft:

A	Goederen	B
18	1	15
32	2	30
50	3	55
100		100

STAP 1.

$a_1 = 1,\ T_a = 18$
$a_2 = 1,\ T_a = 50$
$b_3 = 1,\ T_b = 55.$

STAP 2.

$T_a \neq T_b.$

STAP 3.

$T_b > T_a.$
We gaan goed $i = 3$ herverdelen over A en B:

$x = \frac{55-50}{55+50} = \frac{1}{21}.$
Dus:
$T_b = (55 - 55) + 55 \cdot \left(1 - \frac{1}{21}\right) = 52\frac{8}{21}$
$T_a = 50 + 50 \cdot \frac{1}{21} = 52\frac{8}{21}$
$T_a = T_b.$

In deze situatie krijgt A goederen 1, 2 en $\frac{1}{21}^{\text{ste}}$ deel van goed 3. Volgens haar eerlijke waardering is dit: $22 + 48 + \frac{1}{21} \cdot 30 = 71\frac{3}{7} > 61\frac{3}{7}$, dus als A liegt krijgt zij een groter deel volgens haar waardering dan wanneer zij eerlijk is.

En B krijgt in deze situatie alleen $\frac{20}{21}^{\text{ste}}$ deel van goed 3 en dit is minder dan wat hij gekregen had als A eerlijk was geweest.

(3) We kijken nu naar de situatie dat B liegt en A eerlijk is.

B wil het liefst goed $i = 3$ hebben en A het liefst $i = 2$, dus B brengt zijn waardering van $i = 3$ omlaag tot een waardering net iets hoger dan A's waardering voor $i = 3$ en brengt zijn waardering voor $i = 2$ omhoog tot een waardering net iets lager dan A's waardering voor $i = 2$. Veronderstel dat B de volgende waarderingen geeft:

A	Goederen	B
22	1	23
48	2	42
30	3	35
100		100

STAP 1.

$b_1 = 1,\ T_b = 23$
$a_2 = 1,\ T_a = 48$
$b_3 = 1,\ T_b = 58.$

STAP 2.

$T_a \neq T_b.$

STAP 3.

$T_b > T_a$.
Voor $i = 1$: $\frac{23}{22} = 1\frac{1}{22}$.
Voor $i = 3$: $\frac{35}{30} = 1\frac{1}{6}$.
We gaan dus goed $i = 1$ herverdelen over A en B:

$x = \frac{58-48}{23+22} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$.
Dus:
$T_b = (85 - 23) + 23 \cdot \left(1 - \frac{2}{9}\right) = 52\frac{8}{9}$
$T_a = 48 + 22 \cdot \frac{2}{9} = 52\frac{8}{9}$
$T_a = T_b$.

In deze situatie krijgt B goed 3 en $\frac{7}{9}^{\text{ste}}$ deel van goed 1. Volgens zijn eerlijke waardering is dit: $55 + 15 \cdot \frac{1}{21} = 66\frac{2}{3} > 61\frac{3}{7}$, dus als B liegt krijgt hij een groter deel volgens zijn waardering dan wanneer hij eerlijk is.

A krijgt in deze situatie goed 2 en $\frac{2}{9}^{\text{ste}}$ deel van goed 1 en dit is minder dan wat zij gekregen had als B eerlijk was geweest. Dan had ze immers goed 2 en $\frac{22}{37}^{\text{ste}}$ deel van goed 1 gehad.

(4) We kijken nu naar de situatie waarin A en B beide liegen.
Veronderstel dat A en B beide weten wat de ander gaat zeggen, maar niet weten dat de ander weet wat zijzelf gaan zeggen. We gaan er vanuit dat A en B onderstaande aangepaste waarderingen geven:

A	Goederen	B
18	1	23
32	2	42
50	3	35
100		100

STAP 1.

$b_1 = 1,\ T_b = 23$
$b_2 = 1,\ T_b = 65$
$a_3 = 1,\ T_a = 50$.

STAP 2.

$T_b \neq T_b$.

STAP 3.

$T_b > T_a$.
Voor $i = 1$: $\frac{23}{18} = 1\frac{5}{18}$.
Voor $i = 2$: $\frac{42}{32} = 1\frac{5}{16}$.
We gaan dus goed $i = 1$ herverdelen over A en B:

$x = \frac{65-50}{23+18} = \frac{15}{41}$.
Dus:
$T_b = (65 - 23) + 23 \cdot \left(1 - \frac{15}{41}\right) = 56\frac{24}{41}$
$T_a = 50 + 18 \cdot \frac{15}{41} = 56\frac{24}{41}$
$T_a = T_b$.

In deze situatie zijn A en B beiden slechter af dan wanneer ze allebei eerlijk waren geweest. Namelijk:
A krijgt hier goed 3 en $\frac{26}{41}$ste deel van goed 1. Dit is volgens haar eerlijke waardering $30 + \frac{26}{41} \cdot 22 = 43\frac{39}{41}$, want minder is dan wat ze kreeg als ze eerlijk was geweest.
B krijgt hier goed 3 en $\frac{15}{41}$ste deel van goed 1. Dit is volgens zijn eerlijke waardering $30+\frac{15}{41}\cdot 15 = 35\frac{20}{41}$, want minder is dan wat hij zo krijgen als die eerlijk was geweest.

Uit dit voorbeeld kunnen we concluderen dat door te liegen (wanneer je de waarderingen van de ander weet), je een hoger percentage van het geheel kunt krijgen volgens jouw waarderingen. Je loopt als je liegt echter het risico dat de ander ook liegt, hetgeen je niet weet. Als de ander ook liegt, dan zal het percentage van het totaal dat je ontvangt in de verdeling lager zijn dan als je eerlijk was geweest. Eerlijk zijn is dus het verstandigst.

6 Conclusie en discussie

Het doel van dit onderzoek was om een beeld krijgen van hoe eerlijke verdelingen kunnen worden bereikt. We hebben een procedure gevonden, genaamd de 'adjusted winner procedure', die voor 2 personen altijd een verdeling zal geven die voldoet aan de drie eerlijkheidscriteria: jaloezie-vrijheid, onpartijdigheid en efficiëntie. Voor meer dan 2 personen was het echter niet mogelijk een procedure te vinden die (altijd) verdelingen oplevert die aan deze criteria voldoen. Omdat jaloezie-vrijheid zo belangrijk is voor mensen bij verdelingen, hebben we naar een procedure gekeken die voor meer dan 2 personen altijd een jaloezie-vrije verdeling van één goed oplevert. Deze procedure, de 'Selfridge-Conway procedure', bleek echter zowel niet efficiënt als niet onpartijdig te zijn.

Bij het vinden van eerlijke verdelingen met behulp van bovengenoemde procedures zijn we er in eerste instantie vanuit gegaan dat mensen altijd eerlijk zijn en dus hun oprechte waarderingen voor goederen geven, maar mensen hoeven natuurlijk niet altijd eerlijk te zijn. We zagen (bij een verdeling over twee mensen) dat als mensen niet eerlijk zijn, dat ze dan alleen baat hebben bij liegen als de ander niet liegt. Van de ander is echter alleen bij je bekend wat zijn oprechte waarderingen zijn en niet of hij liegt. Gebleken is dat eerlijk zijn verstandiger is, want als de ander ook liegt zijn beide partijen slechter af.

In dit onderzoek hebben we het redelijk 'eenvoudig' gehouden, maar het roept desalniettemin veel vragen op. Vooral bij verdelingen van één of meerder goederen over meer dan twee personen ontstaan er vragen. Verdelingen over meer dan twee personen kunnen niet én efficiënt én jaloezie-vrij zijn zonder meer condities te definiëren. Maar waarom is dit zo en wat zijn deze condities? Bestaan er wel verdelingen die zowel efficiënt als onpartijdig of zowel jaloezie-vrij als onpartijdig zijn?

We hopen met dit onderzoek ook een betere wiskundige onderbouwing te hebben gegeven dan beschreven is in de gebruikte literatuur.

Er is nog veel onderzoek nodig naar procedures voor $n > 2$ personen die verdelingen leveren die het liefst aan twee van de drie eerlijkheidscriteria voldoen (waarbij geen goederen gesplitst worden). Verder is er tot nu toe nog geen toereikende procedure gevonden is waarbij één of meerdere goederen gedeeld worden om zo aan criteria voor eerlijkeheid te voldoen. Hiernaar zal dus ook nog veel onderzoek gedaan moeten worden. Dit kan bijvoorbeeld een computeralgoritme worden.

Dus, ondanks dat we al een heel eind zijn met dit onderzoek zullen er vragen blijven onstaan als het gaat over eerlijke verdelingen.

7 Referenties

[1] Taylor, Alan M., Pacelli, Allison M., *Mathematics and Politics: Strategy, Voting, Power and Proof.* Springer, tweede editie 2008, p. 152-204, 314-336.

[2] Taylor, Alan M., Pacelli, Allison M., *Mathematics and Politics: Strategy, Voting, Power and Proof.* Springer, tweede editie 2008, p. 161-163, "We can think of [...] would make everyone happier.".

[3] Taylor, Alan M., Pacelli, Allison M., *Mathematics and Politics: Strategy, Voting, Power and Proof.* Springer, tweede editie 2008, p. 152-204.

[4] Taylor, Alan M., Pacelli, Allison M., *Mathematics and Politics: Strategy, Voting, Power and Proof.* Springer, tweede editie 2008, p. 314-336.

[5] 'Adjusted winner, an algorithm for fair division'. Beschikbaar via `http://www.nyu.edu/projects/adjustedwinner/`. Bezocht op 08-04-2014.

[6] Taylor, Alan M., Pacelli, Allison M., *Mathematics and Politics: Strategy, Voting, Power and Proof.* Springer, tweede editie 2008, p. 331, "Now with [...] the example above.".

[7] Steven J. Brams, Micheal A. Jones, and Christian Klamler, *Better ways to cut a cake.* Notices of the AMS, volume 53, number 11, p. 1320, "We next [...] also stategy-proof.".

[8] Steven J. Brams, Alan D. Taylor, *Fair Division: From Cake-Cutting to Dispute Resolution.* Cambridge University Press 1996, p. 116-119.